

Geometría III

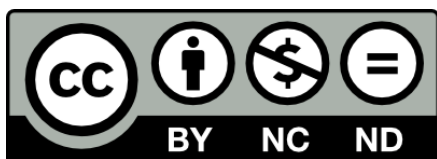
Examen IV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría III

Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B.

Profesor José María Espinar García.

Descripción Parcial de los Temas 1 y 2.

Fecha 7 de noviembre de 2023.

Ejercicio 1. Sean R_1 y R_2 , $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, dos rectas paralelas en un plano afín \mathcal{A} . Sean $a_i, b_i, c_i \in R_i$, $i = 1, 2$, tres puntos distintos en cada una de las rectas. Demostrar que si $R_{a_1b_2} \parallel R_{a_2b_1}$ y $R_{b_1c_2} \parallel R_{b_2c_1}$, entonces $R_{a_1c_2} \parallel R_{a_2c_1}$.

Es la demostración del Teorema de Pappus en el caso de que las rectas sean paralelas.

Ejercicio 2. Sea $T := \{a_1, a_2, a_3\}$ un triángulo en un plano afín \mathcal{A} . Denotemos por a'_i , $i = 1, 2, 3$, al punto medio del lado opuesto a a_i , es decir, $a'_i = a_j + \frac{1}{2}\overrightarrow{a_j a_k}$, $i \neq j \neq k$ e $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Demostrar que existe una homotecia $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $h(a_i) = a'_i$ para $i = 1, 2, 3$. Calcular el centro y la razón de dicha homotecia.

En la demostración del Teorema de Euler se vio que dicha homotecia existe y que su centro es el baricentro del triángulo y su razón es $-1/2$.

Ejercicio 3. Sean $S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = -1\}$ y $S_2 = (1, 2, 0) + \mathcal{L}\{(-1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

1. Calcula la intersección $I := S_1 \cap S_2$ y la suma.

Calcularemos en primer lugar su intersección. Para ello, calculamos la ecuación implícita de S_2 :

$$S_2 \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 1 & 0 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 = - \begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ 1 & y-2 \end{vmatrix} = y - 2 + x - 1 = y + x - 3$$

Por tanto, calculamos ahora $I = S_1 \cap S_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = -1 \\ y + x - 3 = 0 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} x = \lambda + 7 \\ y = -\lambda - 4 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $I = (7, -4, 0) + \mathcal{L}\{(-1, -1, 1)\}$. Como $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, por la fórmula de las dimensiones, tenemos que:

$$\dim S_1 \vee \dim S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2 = 2 + 2 - 1 = 3$$

Además, como $S_1 \vee S_2 \subset \mathbb{R}^3$, tenemos que $S_1 \vee S_2 = \mathbb{R}^3$.

2. Sea $\mathcal{R} := \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -1), (2, -2, 1)\}$. Demostrar que es un sistema de referencia en \mathbb{R}^3 .

Para ello, mostraremos que su base asociada es base de \mathbb{R}^3 . Esta es:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 1)\}$$

Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Por tanto, \mathcal{B} es base de \mathbb{R}^3 y, por tanto, \mathcal{R} es un sistema de referencia en \mathbb{R}^3 .

3. Sea el plano afín $P := \{(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma = 1\}$ dado en coordenadas respecto de \mathcal{R} . Calcular, si es posible, el ángulo de intersección entre P e I . En caso de no ser posible, decir por qué.

Tenemos que P es un hiperplano e I es una recta. Por tanto, sí se puede calcular el ángulo de intersección entre ambos. Para ello, necesitamos calcular en primer lugar un vector normal a P . Para ello, calculamos la ecuación implícita de P en el sistema de referencia usual. Como $\gamma = 0 + x - y - z$, tenemos que $P \equiv x - y - z = 1$, por lo que un vector normal a P es $v_P = (1, -1, -1)$. Por tanto, el ángulo de intersección entre P e I es:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\langle (1, -1, -1), (-1, -1, 1) \rangle}{\sqrt{3}^2} \right) = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{-1}{3} \right) \approx -0,34 \text{ rad}$$

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación afín dada por:

$$\begin{aligned} f(-1, 1, 0) &= (11/5, -2/5, 3) & f(0, 0, 1) &= (18/5, -1/5, 4) \\ f(1, 0, -1) &= (8/5, -6/5, 4) & f(2, -2, 1) &= (2, 1, 2) \end{aligned}$$

1. ¿Es f una isometría de \mathbb{R}^3 ?
2. Calcular el conjunto de puntos fijos de f en el sistema de referencia usual.
3. Calcular las ecuaciones que representan a f respecto de los sistemas de referencia \mathcal{R} (en el dominio) y \mathcal{R}' (en el codominio); siendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -1), (2, -2, 1)\} \\ \mathcal{R}' &= \{(0, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 0), (-2, 0, 1)\} \end{aligned}$$