Geometría III

Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III
Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B.

Profesor José María Espinar García.

Descripción Parcial de los Temas 1 y 2.

Fecha 7 de noviembre de 2023.

Ejercicio 1. Sean R_1 y R_2, $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, dos rectas paralelas en un plano afín $\mathcal{A}$. Sean $a_i, b_i, c_i \in R_i$, $i = 1, 2$, tres puntos distintos en cada una de las rectas. Demostrar que si $R_{a_1b_2} \| R_{a_2b_1}$ y $R_{b_1c_2} \| R_{b_2c_1}$, entonces $R_{a_1c_2} \| R_{a_2c_1}$.

Es la demostración del Teorema de Pappus en el caso de que las rectas sean paralelas.

Ejercicio 2. Sea $T := \{a_1, a_2, a_3\}$ un triángulo en un plano afín $\mathcal{A}$. Denotemos por a_i', $i = 1, 2, 3$, al punto medio del dado opuesto a a_i, es decir, $a_i' = a_j + \frac{1}{2}\overrightarrow{a_j a_k}$, $i \neq j \neq k$ e $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Demostrar que existe una homotecia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $h(a_i) = a_i'$ para $i = 1, 2, 3$. Calcular el centro y la razón de dicha homotecia.

En la demostración del Teorema de Euler se vio que dicha homotecia existe y que su centro es el baricentro del triángulo y su razón es $-1/2$.

Ejercicio 3. Sean $S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = -1\}$ y $S_2 = (1, 2, 0) + \mathcal{L}\{(-1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

1. Calcula la intersección $I := S_1 \cap S_2$ y la suma.

   Calcularemos en primer lugar su intersección. Para ello, calculamos la ecuación implícita de S_2:

$$S_2 \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 1 & 0 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 = -\begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ 1 & y-2 \end{vmatrix} = y - 2 + x - 1 = y + x - 3$$

   Por tanto, calculamos ahora $I = S_1 \cap S_2$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + z = -1 \\ y + x - 3 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda + 7 \\ y = -\lambda - 4 \\ z = \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

   Por tanto, $I = (7, -4, 0) + \mathcal{L}\{(-1, -1, 1)\}$. Como $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, por la fórmula de las dimensiones, tenemos que:

$$\dim S_1 \vee \dim S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2 = 2 + 2 - 1 = 3$$

   Además, como $S_1 \vee S_2 \subset \mathbb{R}^3$, tenemos que $S_1 \vee S_2 = \mathbb{R}^3$.

2. Sea $\mathcal{R} := \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -1), (2, -2, 1)\}$. Demostrar que es un sistema de referencia en $\mathbb{R}^3$.

   Para ello, mostraremos que su base asociada es base de $\mathbb{R}^3$. Esta es:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 1)\}$$

   Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

   Por tanto, $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y, por tanto, $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia en $\mathbb{R}^3$.

3. Sea el plano afín $P := \{(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma = 1\}$ dado en coordenadas respecto de $\mathcal{R}$. Calcular, si es posible, el ángulo de intersección entre P e I. En caso de no ser posible, decir por qué.

   Tenemos que P es un hiperplano e I es una recta. Por tanto, sí se puede calcular el ángulo de intersección entre ambos. Para ello, necesitamos calcular en primer lugar un vector normal a P. Para ello, calculamos la ecuación implícita de P en el sistema de referencia usual. Como $\gamma = 0 + x - y - z$, tenemos que $P \equiv x - y - z = 1$, por lo que un vector normal a P es $v_P = (1, -1, -1)$. Por tanto, el ángulo de intersección entre P e I es:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\langle (1,-1,-1)\ (-1,-1,1)\rangle}{\sqrt{3}^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx -0{,}34 \text{ rad} \approx -0{,}34 \text{ rad}$$

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación afín dada por:

$$\begin{array}{ll} f(-1,1,0) = (^{11}/_5, ^{-2}/_5, 3) & f(0,0,1) = (^{18}/_5, ^{-1}/_5, 4) \\ f(1,0,-1) = (^{8}/_5, ^{-6}/_5, 4) & f(2,-2,1) = (2,1,2) \end{array}$$

1. ¿Es f una isometría de $\mathbb{R}^3$?

2. Calcular el conjunto de puntos fijos de f en el sistema de referencia usual.

3. Calcula las ecuaciones que representan a f respecto de los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ (en el dominio) y $\mathcal{R}'$ (en el codominio); siendo:

$$\mathcal{R} = \{(1,-1,0), (0,0,1), (1,0,-1), (2,-2,1)\}$$
$$\mathcal{R}' = \{(0,0,1), (1,-1,0), (0,0,0), (-2,0,1)\}$$